Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 13.06.2012.

Drugi parcijalni iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1

(20%) a) Za $\triangle ABC$ vrijedi $2\measuredangle CBA = \measuredangle CAB + \measuredangle ACB$. U unutrašnjosti $\triangle ABC$ je odabrana tačka P tako da vrijedi $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA$. Dokazati da je $PB^2 = PA \cdot PC$.

(20%) b) Neka je dat trapez $\square ABCD$ sa osnovicama AB i CD, dat je krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačke A i D i dodiruje pravu $p(B, C)$ u tački F. Na osnovici AB data je tačka M takva da je $\square AMCD$ paralelogram i $MC \perp BC$. Ako je $\{E\} = p(B, C) \cap p(A, D)$ i G sredina duži AD dokazati da je $\square OFEG$ pravougaonik.

(60%) c) Četverougao $\square ABCD$ je tetivni. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom BC siječe dijagonalu CA u tački P, stranicu AB u tački Q i krug opisan oko četverougla $\square ABCD$ u tački R. Prava u tački D paralelna sa pravom AB siječe pravu BC u tački T. Ako je $PQ \cong QR$ dokazati da vrijedi $\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$.

Zadatak br. 2

(20%) a) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

(20%) b) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

(60%) c) Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisanog kruga i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

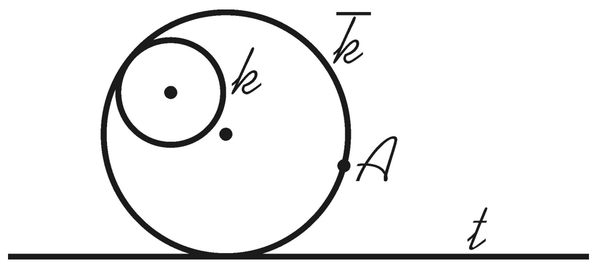
Zadatak br. 3

(20%) a) Dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ se dodiruju u tački A. Neka su p i q dvije proizvoljne prave koje prolaze kroz tačku A takve da $p \cap k_1 = \{A, E\}$, $p \cap k_2 = \{A, C\}$, $q \cap k_1 = \{A, D\}$ i $q \cap k_2 = \{A, B\}$. Pokazati da je $BC \| DE$.

(20%) b) Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tačaka. Na pravoj $p(O_1, O_3)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_3) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

(60%) c)

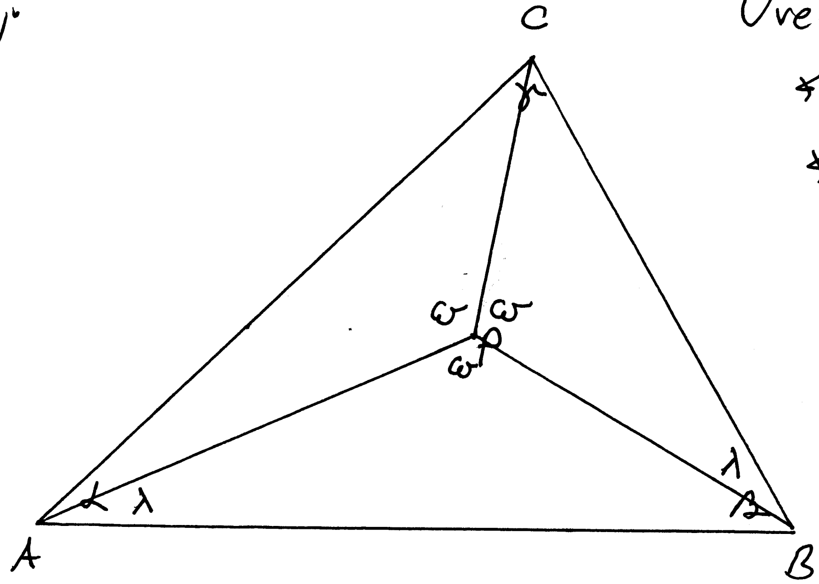
Dati je krug $k(O, r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k i pravu t kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Za ΔABC vrijedi $2\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB$. U unutrašnjosti ΔABC je odabrana tačka P tako da vrijedi $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA$. Dokazati da je $PB^2 = PA \cdot PC$.

Rj.



Uvedimo oznake
$\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \omega$,
$\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle CBA = \beta$.

Prema postavci zadatka
$2\beta = \alpha + \gamma$.

Kako je $\alpha + \gamma = 180° - \beta$ to je $2\beta = 180° - \beta$
$\beta = 60°$

Dalje $3\omega = 360° \Rightarrow \omega = 120°$.

Sad imamo

$$\sphericalangle PAB = 180° - \omega - \sphericalangle PBA = 60° - \sphericalangle PBA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle PBA = \sphericalangle PBC$$

tj. $\sphericalangle PAB \cong \sphericalangle PBC = \lambda$

Kako su u trouglovima ΔABP i ΔPBC podudarna dva ugla to je podudaran i treći ugao pa prema sličnost SUU

$\Delta ABP \sim \Delta PBC$

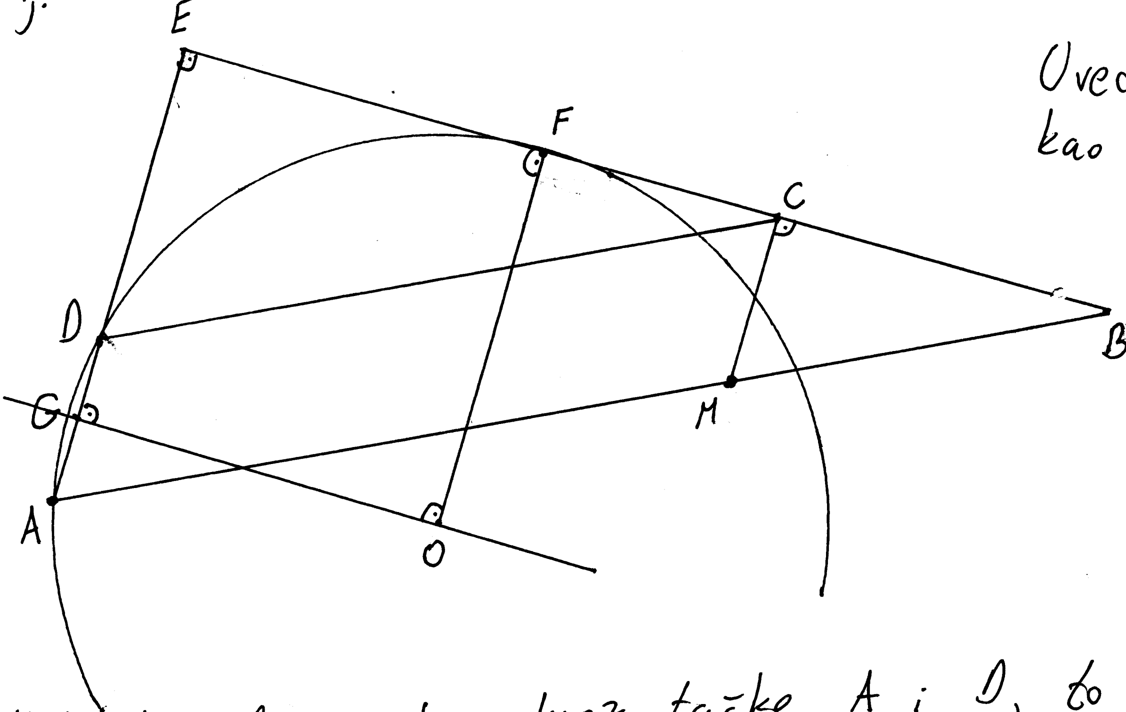
$\Downarrow$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow PB^2 = PA \cdot PC$$

q.e.d.

(#) Neka je dat trapez $\square ABCD$ sa osnovicama AB i CD, i neka je dat krug $k(O,r)$ koji prolazi kroz tačkama A i D i dodiruje pravu $p(B,C)$ u tački F. Na osnovici AB data je tačka M taka da je $\square AMCD$ paralelogram i $MC \perp BC$. Ako je $\{E\} = p(B,C) \cap p(A,D)$ i G sredina duži AD dokazati da je $\square OFEG$ pravougaonik.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Kako krug $k(O,r)$ prolazi kroz tačke A i D, to tačka O pripada simetrali duži AD. G je sredina AD pa je $OG \perp AD$.
Kako je $\square AMCD$ paralelogram to $p(A,D) \parallel p(M,C)$, a iz postavke zadatka znamo da je $BC \perp MC \Rightarrow AE \perp BE$.

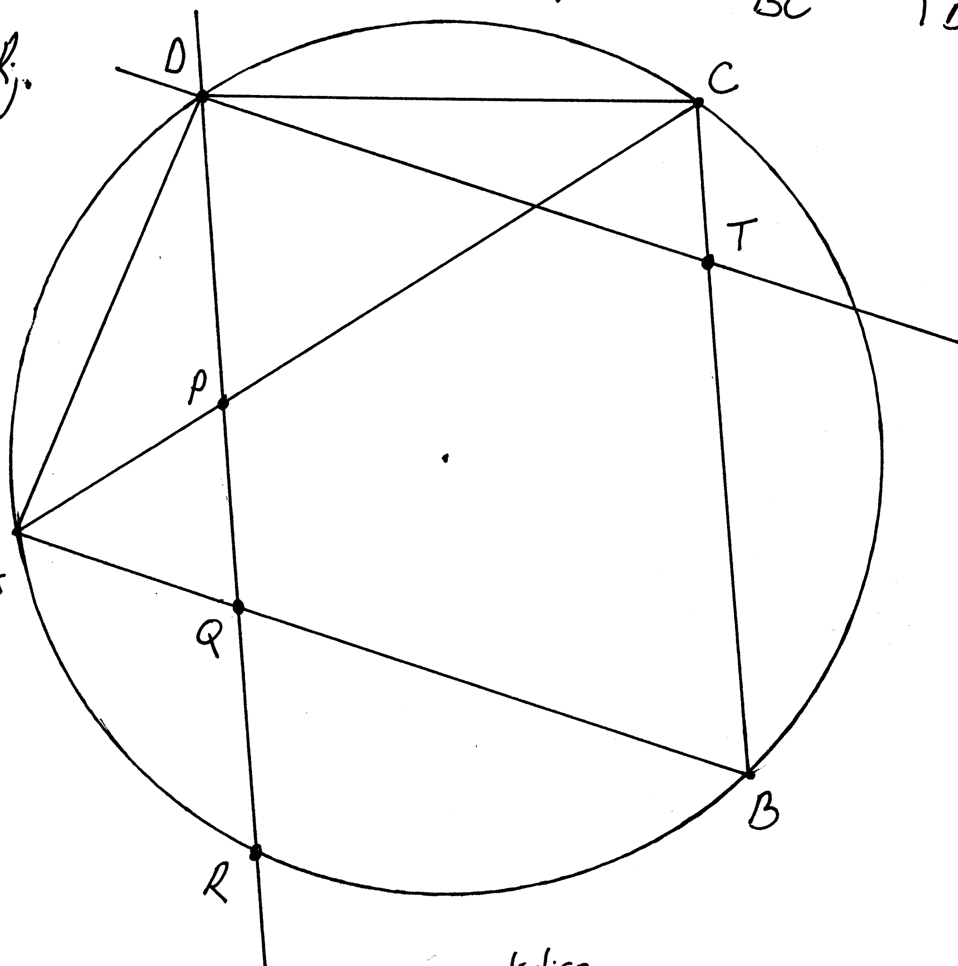
F je dodirna tačka kruga $k(O,r)$ i prave $p(B,C)$ pa je $OF \perp BE$. Na kraju, kako je $p(B,C) \parallel p(O,G)$ (zato što na pravoj $p(A,E)$ imamo $\measuredangle OGE \cong \measuredangle FEG = 90°$) i kako je $OF \perp BE$ to je $OF \perp GO$.

Pokazali smo da su svi uglovi u $\square OFEG$ pravi uglovi

$\Rightarrow \square OFEG$ je pravougaonik

(#) Četverougao $\square ABCD$ je tetivni. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom BC siječe dijagonalu CA u tački P, stranicu AB u tački Q i krug opisan oko četverougla $\square ABCD$ u tački R. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom AB siječe pravu BC u tački T. Ako je $PQ \cong QR$, dokazati da vrijedi $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BT}{TD}$.

Rj.



Posmatrajmo četverougao $\square ARBD$. Njegove tačke se sijeku u tački Q pa imamo $AQ \cdot QB = QR \cdot QD$

tj. $\dfrac{AQ}{QR} = \dfrac{DQ}{BQ}$

Kako je $QR \cong PQ$ to je

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{DQ}{BQ} \quad \dots (*)$$

$$p(P,Q) \parallel p(B,C) \overset{\text{posljedice T.T.}}{\Longrightarrow} \frac{AQ}{QP} = \frac{AB}{BC} \quad \dots (**)$$

$$(*) \wedge (**) \Longrightarrow \frac{DQ}{BQ} = \frac{AB}{BC} \quad \dots (\square)$$

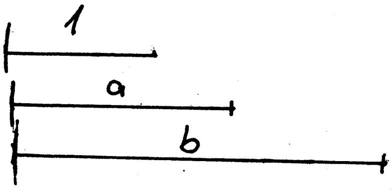
Primjetimo da je $\square QBTD$ paralelogram (Zašto?).
Prema tome $DQ \cong BT \wedge BQ \cong TD$. Sad na osnovu $(\square)$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$$

q.e.d.

Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{2}}{ab}$, gdje su a i b date duži.

Rj. Neka su date duži a, b i neka je data jedinična duž.



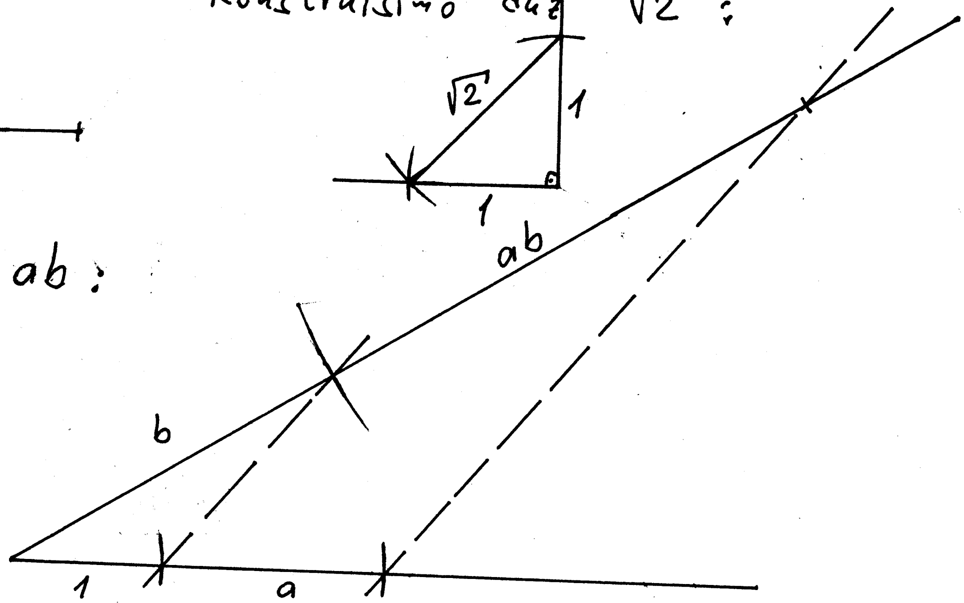
Konstruišimo duž $\sqrt{2}$:

Konstruišimo duž ab:

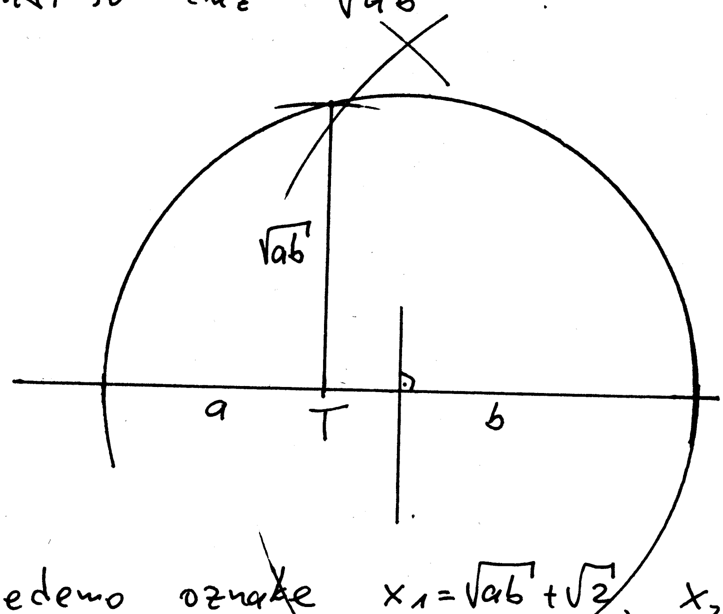
$x_1 = ab \quad /:b$

$\dfrac{x_1}{b} = \dfrac{a}{1}$

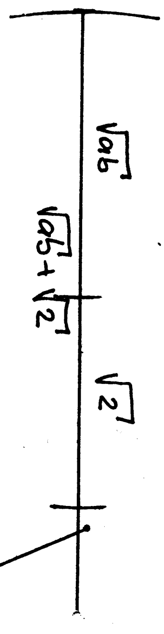
$\dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{x_1}$



Konstruišimo duž $\sqrt{ab}$



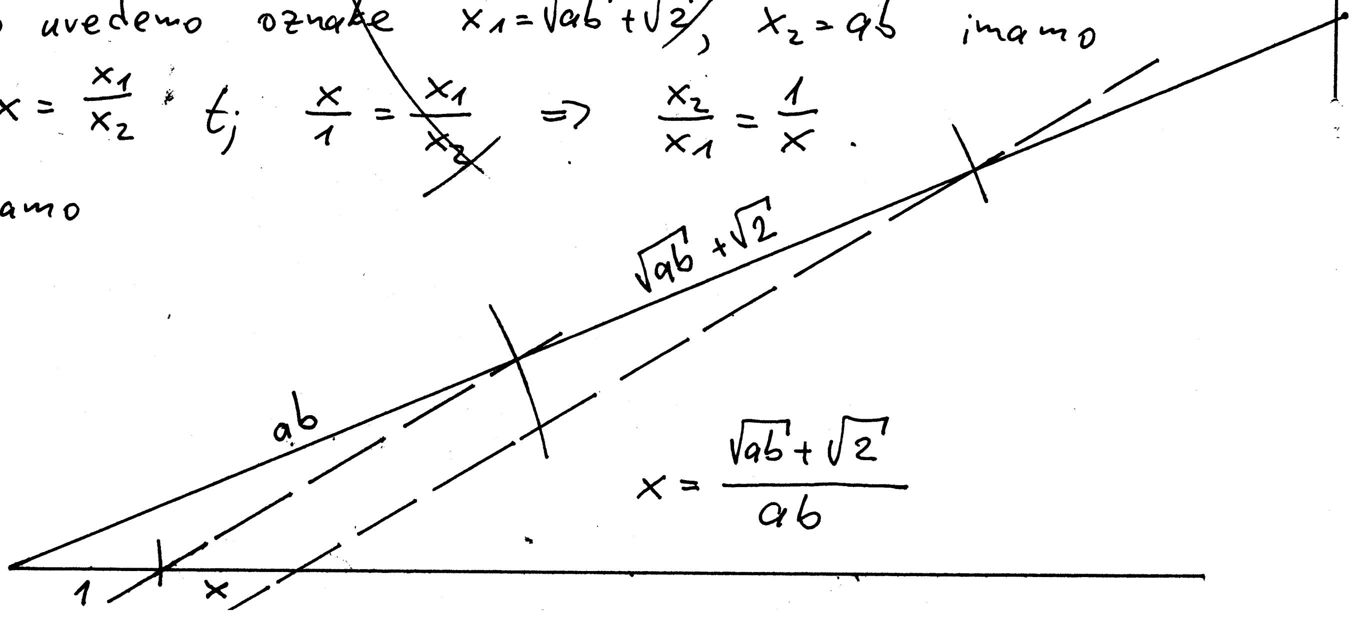
Konstruišimo duž $\sqrt{ab}+\sqrt{2}$:



Ako uvedemo oznake $x_1 = \sqrt{ab}+\sqrt{2}$, $x_2 = ab$ imamo

$x = \dfrac{x_1}{x_2}$ tj. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{x_1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{x}$.

Imamo

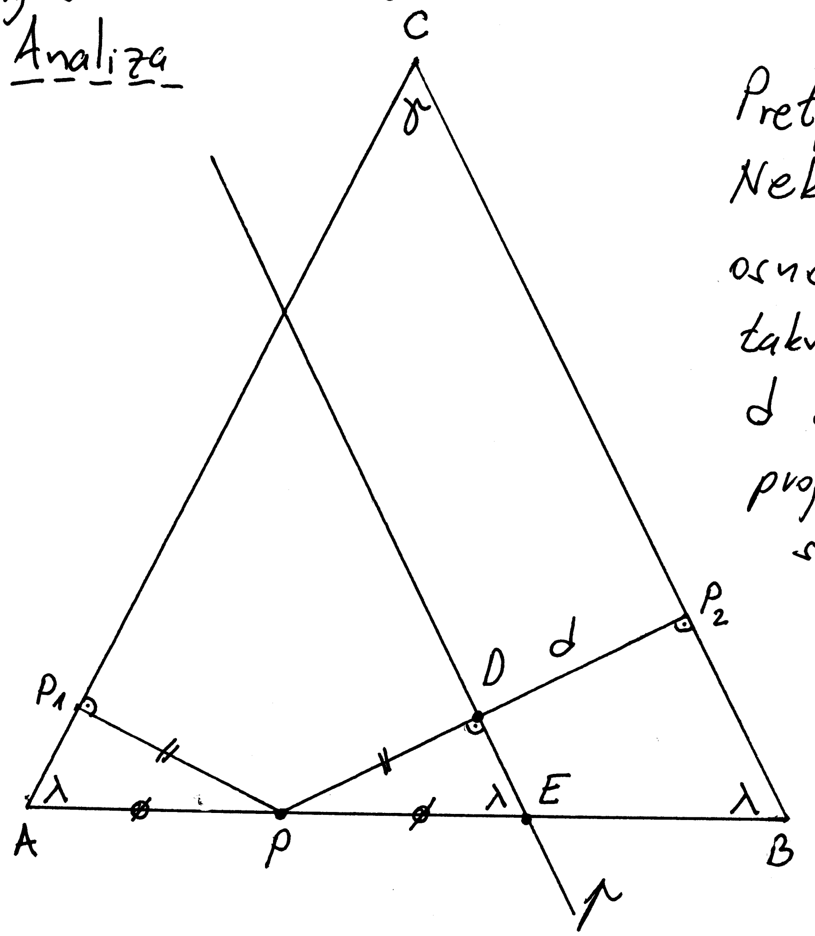


$$x = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{2}}{ab}$$

(#) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

Rj:

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je P tražena tačka na osnovici AB datog jkk ΔABC takva da je $PP_1 - PP_2 = d$ gdje je d data duž, a P_1 i P_2 su ortog. projekcije tačke P redom na stranice AC i BC.

Na duži PP_2 izaberimo tačku D t.d. $PP_1 \cong PD$, i kroz tačku D postavimo pravu $p \parallel p(B,C)$.

$p \parallel p(B,C)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle PED \cong \sphericalangle PBC$

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle PAP_1 \cong \sphericalangle PED = \lambda \\ \sphericalangle PP_1A \cong \sphericalangle EDP = 90^\circ \\ PP_1 \cong PD \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \Delta APP_1 \cong \Delta PED$$

$$\Downarrow$$

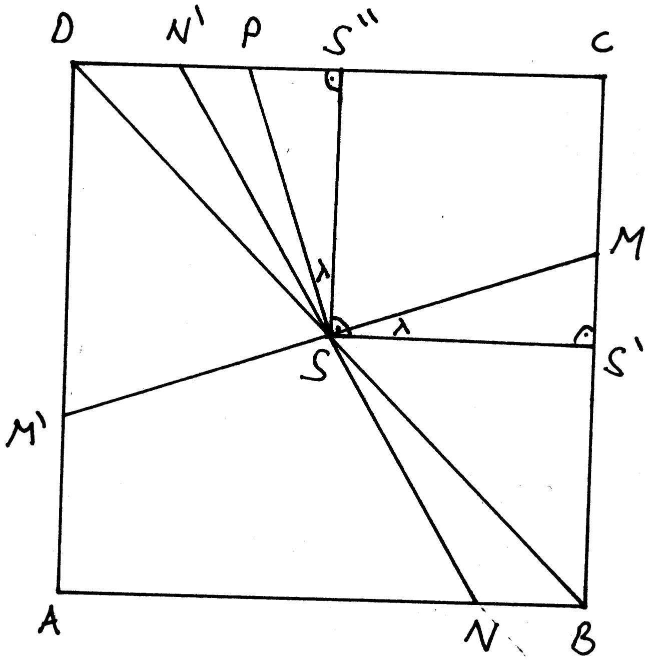
$$AP \cong PE$$

Kako je dat ΔABC i dužina d, to pravu p možemo konstruisati (prava p se nalazi na rastojanju d od stranice BC). Poslije toga ćemo dobiti tačku E, pa nije teško konstruisati sredinu P duži AE.

(#) Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ čiji je centar opisane kružnice tačka S (ujedno i presjek dijagonala) i neka su date tačke $M \in BC$ i $N \in AB$.

$p(M,S) \cap AD = \{M'\}$

$p(N,S) \cap CD = \{N'\}$

Neka su S' i S'' redom sredine stranica BC i CD.

SS' srednja linija $\Delta DBC \Rightarrow SS' = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AB$

SS'' srednja linija $\Delta ACD \Rightarrow SS'' = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$

$\Big\} \Rightarrow SS' \cong SS''$

Nije teško pokazati (iz podudarnosti USU) da je $MS \cong M'S$ i da je $NS \cong N'S$.

Neka je $P \in CD$ takva $SP \perp MM'$. Označimo sa $\lambda = \measuredangle PSS''$.

$\measuredangle PSS' = 90° + \lambda$, $\measuredangle PSS' = \measuredangle PSM + \measuredangle MSS' = 90° + \measuredangle MSS' \Rightarrow$

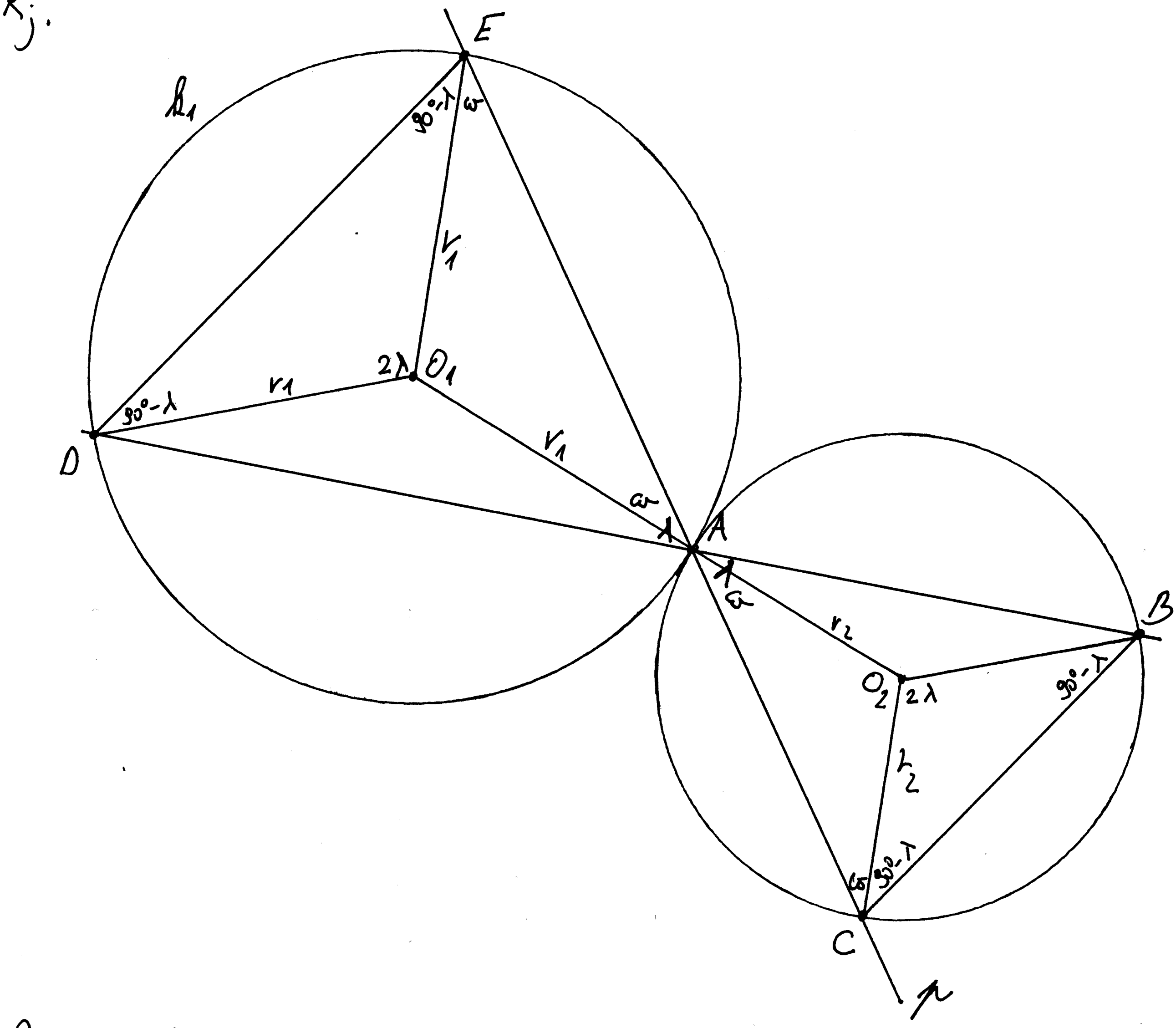
$\Rightarrow \measuredangle MSS' = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSS' \cong \measuredangle S''SP = \lambda \\ SS' \cong SS'' \\ \measuredangle SS'M \cong \measuredangle SS''P = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \Delta SS'M \cong \Delta SS''P \\ \Downarrow \\ SM \cong PS \end{array}$$

Kako su nam date tačke M i S to možemo konstruisati duž MM' a poslije toga i tačku P. Kako možemo konstruisati duž NN' time nije teško konstruisati i kvadrat $\square ABCD$.

\# Dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ se dodiruju u tački A. Neka su p i q dvije proizvoljne prave koje prolaze kroz tačku A takve da $p \cap k_1 = \{A, E\}$, $p \cap k_2 = \{A, C\}$, $q \cap k_1 = \{A, D\}$ i $q \cap k_2 = \{A, B\}$. Pokazati da je $BC \parallel DE$.

Rj.



Dva unakrsna ugla $\sphericalangle DAE$ i $\sphericalangle BAC$ označimo sa λ. Kako su $\sphericalangle DO_1E$ i $\sphericalangle DAE$ centralni i periferiski uglovi nad tetivom DE to je $\sphericalangle DO_1E = 2\lambda \overset{DO_1 \cong O_1E = r}{\Longrightarrow} \sphericalangle O_1ED \cong \sphericalangle O_1DE = 90° - \lambda$

Slično zaključimo da je $\sphericalangle CO_2B = 2\lambda$ i $\sphericalangle O_2CB \cong \sphericalangle O_2BC = 90° - \lambda$.

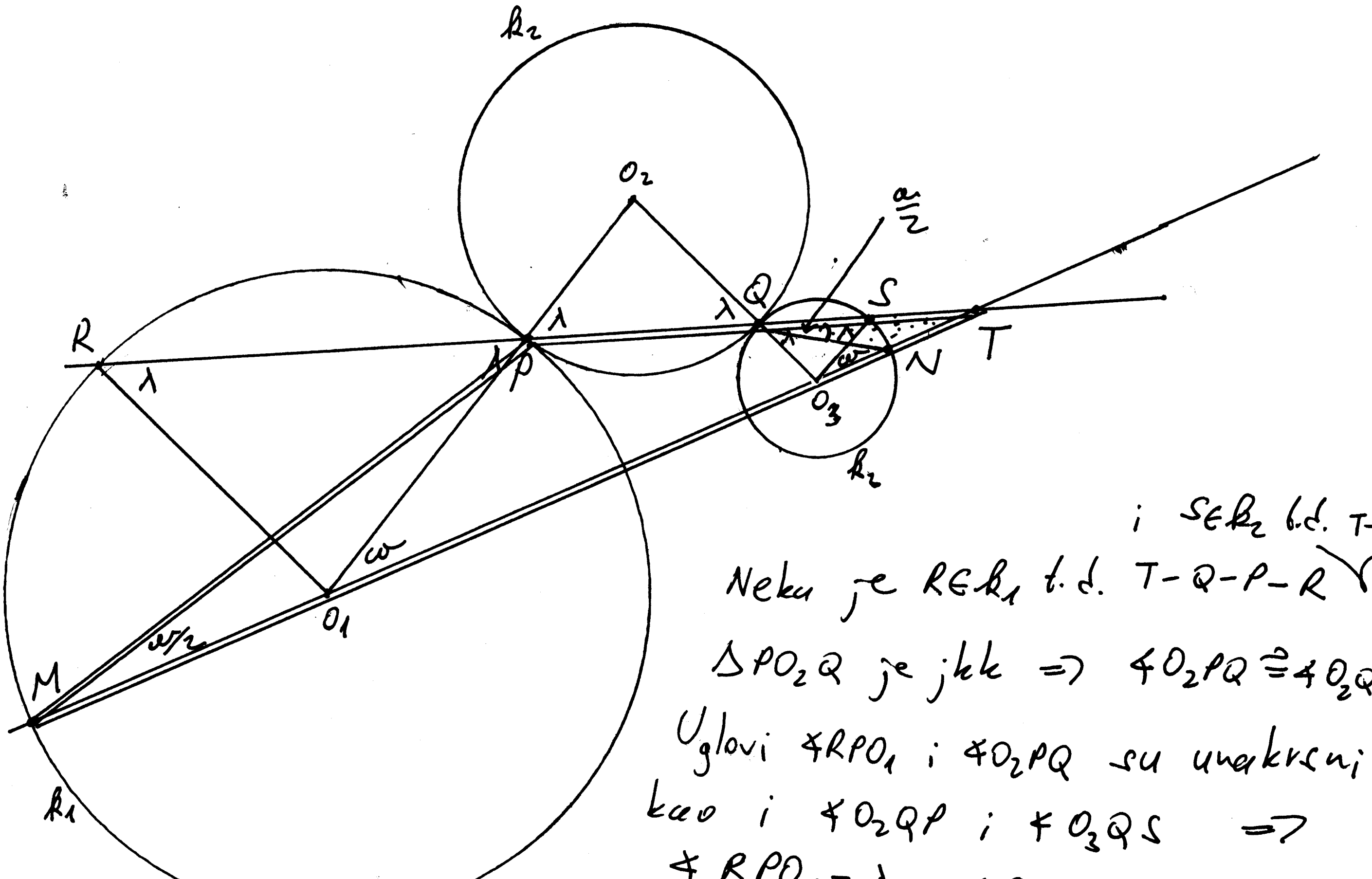
Prava $p(O_1, O_2)$ prolazi kroz tačku A, i unakrsne uglove $\sphericalangle O_1AE \cong \sphericalangle O_2AC$ označimo sa ω. Kako su trouglovi ΔAEO_1 i ΔACO_2 jkk sa jednim uglom ω na osnovici $\Rightarrow \sphericalangle ACO_2 \cong \sphericalangle AEO_1 = \omega$

Sad na pravoj $p(C, E)$ imamo dva podudarna ugla

$\sphericalangle AED \cong \sphericalangle ACB = \omega + 90° - \lambda \Rightarrow CB \parallel ED$ q.e.d.

Neka su dati krugovi $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ i $k_3(O_3,r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1,O_2)$ date su tačke M i N takve da $M\in k_1$, $N\in k_3$ i važi poredak $M-O_1-O_2-N$. Neka je $\{T\} = p(O_1,O_2)\cap p(P,Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

Rj.



i $S\in k_2$ t.d. $T-S-Q$

Neka je $R\in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$

$\triangle PO_2Q$ je jkk $\Rightarrow \measuredangle O_2PQ \cong \measuredangle O_2QP = \lambda$,

Uglovi $\measuredangle RPO_1$ i $\measuredangle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\measuredangle O_2QP$ i $\measuredangle O_3QS$ $\Rightarrow$

$\measuredangle RPO_1 = \lambda = \measuredangle SQO_3$

Kako su $\triangle PO_1R$ i $\triangle SO_3Q$ jkk $\Rightarrow \measuredangle PRO_1 = \lambda$ i $\measuredangle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S,R)$ i primjetimo da je $\measuredangle RSO_3 \cong \measuredangle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

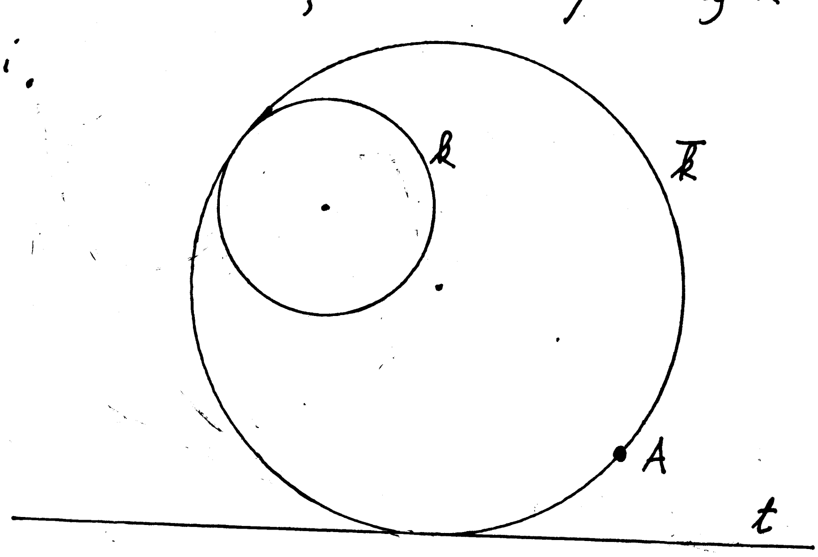
$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M,N)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle SO_3T \cong \measuredangle PO_1T = \omega$.

Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\measuredangle O_1MP$ i $\measuredangle NQS$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle QTN \cong \measuredangle MTQ \text{ (zajednički ugao)} \\ \measuredangle TQN \cong \measuredangle TMP = \frac{\omega}{2} \\ \measuredangle TNQ \cong \measuredangle TPM \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(slič. UUU)}} \triangle TNQ \sim \triangle TPM$$

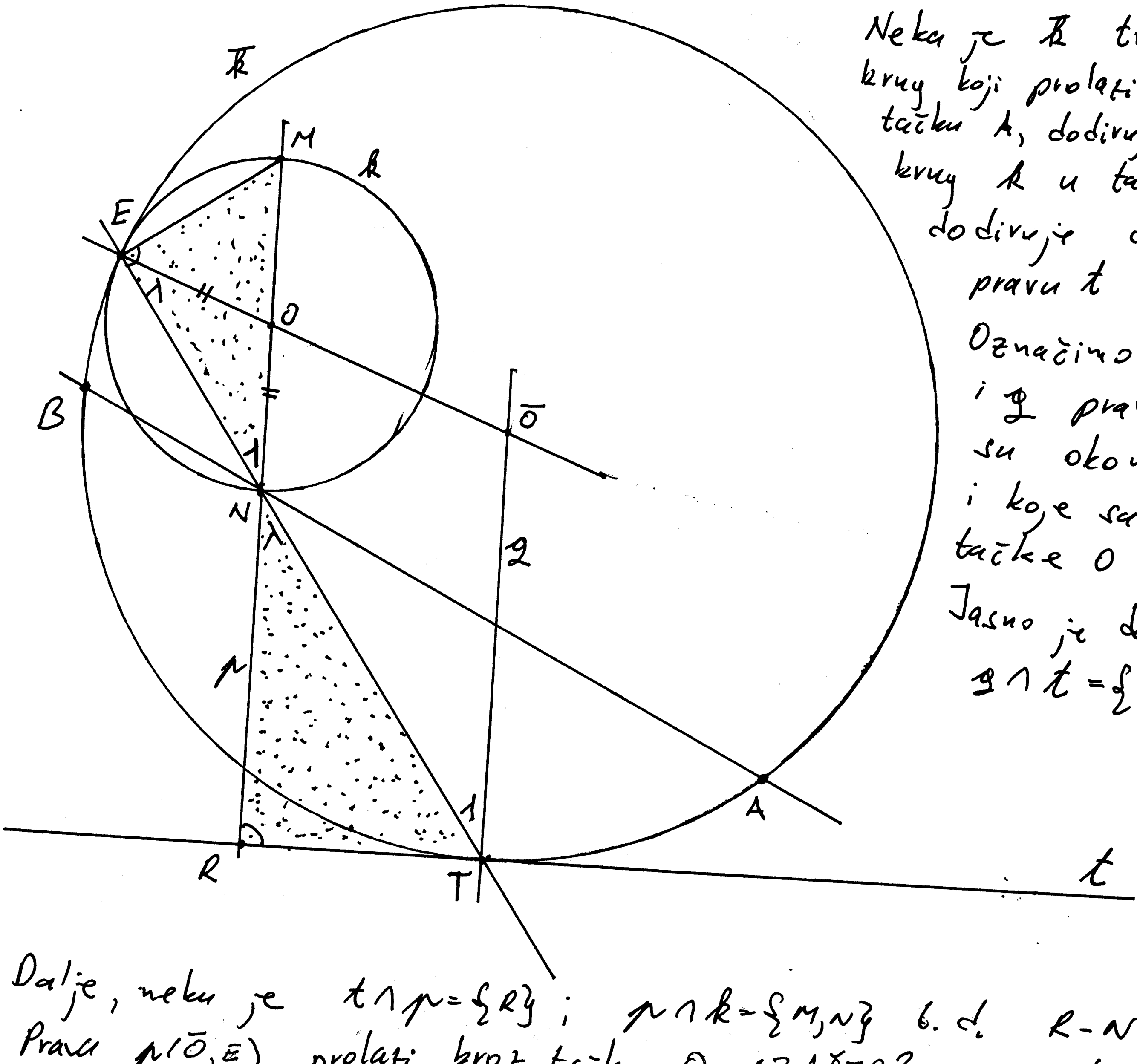
q.e.d.

(#) Dat je krug $k(O,r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O},\bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A, i dodiruje krug k i pravu t kao na skici.



Rj. <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\bar{k}$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug k u tački E i dodiruje datu pravu t u tački T. Označimo sa p i q prave koje su okomite na t i koje sadrže redom tačke O i $\bar{O}$. Jasno je da $q \cap t = \{T\}$.

Dalje, neka je $t \cap p = \{R\}$ i $p \cap k = \{M, N\}$ t.d. $R-N-M$.
Prava $p(\bar{O}, E)$ prolazi kroz tačku O (ZAŠTO? Objasniti ovo).
Posmatrajmo sad trouglove ΔEON i $\Delta E\bar{O}T$.

Trougao $\Delta E\bar{O}T$ je jednakokraki ($E\bar{O} \cong T\bar{O}$) pa je $\measuredangle \bar{O}ET \cong \measuredangle \bar{O}TE = \lambda$. Isto tako ΔEON je jkk ($OE \cong ON$) pa je $\measuredangle OEN \cong \measuredangle ONE = \lambda$. Želimo pokazati da $N \in p(E,T)$. Kako je $p \parallel q$ i $p(N,T)$ transferzala to je $\measuredangle TNR = \lambda$

Sad na pravoj p imamo $\measuredangle TNR = \lambda = \measuredangle ONE \Rightarrow N \in p(E,T)$

Posmatrajmo ΔRTN i ΔENM. U njima imamo po jedan ugao od $90°$, ugao λ pa je i treći ugao podudaran.

$$\overset{(\text{slič. UUU})}{\Longrightarrow} \Delta RTN \sim \Delta ENM$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{NT}{NM} = \frac{NR}{NE} \Rightarrow NT \cdot NE = NM \cdot NR \quad \ldots (1)$$

Posmatrajmo pravu $p(N,A)$. Neka je $p(N,A) \cap k = \{A, B\}$ t. d. $B - N - A$. Ako posmatramo krug k imamo

$$NA \cdot NB = NT \cdot NE \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \quad NA \cdot NB = NM \cdot NR$$

$$NB = \frac{NM \cdot NR}{NA} \quad \ldots (3)$$

Sad, kako su nam poznate tačke A, N, M, R to možemo prema (3) možemo konstruisati tačku B pa smo naš problem sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje datu pravu. Ovaj problem smo već imali, nije teško konstruisati pomoćni krug i uz pomoć njega dobiti tačku T.

Prema tome, traženi krug možemo konstruisati.